1 FKE-DL, semestr 1, 2018/19
Algebra liniowa z geometrią analityczną
Zestaw zadań dodatkowych do samodzielnej pracy
Część 2. Macierze

1. Wykonać działania

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$

b) $3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} =$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} =$

f) $(A \cdot A^T)^2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T =$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$

j) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}^3$

2. Na macierzach $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

wykonać (o ile to możliwe) wskazane działania (a) AB (b) AC (c) AD (d) BA (e) CA (f) DA (g) A^3 (h) B^3 (i) C^3 (j) D^3 (k) AC^T (l) $(C + D^T)(C^T + D)$ (m) $(DC + 3A)^2$

3. Wyznaczyć $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ a następnie udowodnić go indukcyjnie.

4. Obliczyć wyznaczniki

a) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad \det B = \begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$ $\quad \det C = \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2i & -1 \\ i & 0 & -2i \\ i & 1 & 1+i \end{vmatrix}$

c) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

5. Wyznaczyć dla jakiej wartości parametru λ macierz A jest macierzą nieosobliwą:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & -3 \\ \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$

6. Znaleźć macierze odwrotne do podanych (o ile to możliwe)

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7. Wyznaczyć rzędy podanych macierzy oraz wyznaczyć ich minory

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 1 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

8. Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$

9. Rozwiązać równanie macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

d) $X \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

e) $2X + X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 \\ 15 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

f) $\left(3X + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

g) $2X \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h) $2X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Odpowiedzi - Macierze

1. a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 410 & 341 \\ 341 & 317 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -6 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} -1 & 12 & -8 \\ -12 & 19 & -8 \\ 8 & 8 & -9 \end{bmatrix}$

2. (a)

3. $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $\det A = -29,\ \det B = 5 + 21i,\ \det C = -2$
   b) $\det A = -2,\ \det B = 15,\ \det C = 20,\ \det D = 2 + 7i$
   c) $\det A = 201,\ \det B = -71,\ \det C = -289$
   d) $\det A = 6,\ \det B = 0,\ \det C = 297$
   e) $\det A = 130,\ \det B = -72,\ \det C = -355$
   f) $\det A = 46,\ \det B = -65,\ \det C = -55$

5. a) $\lambda = 2\sqrt{2}$, $\lambda = -2\sqrt{2}$ b) $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$

6. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

7. a) $\text{rz}A = 2$, $\text{rz}B = 1$, b) $\text{rz}A = 3$, $\text{rz}B = 2$, c) $\text{rz}A = 3$, $\text{rz}B = 3$, d) $\text{rz}A = 4$, $\text{rz}B = 2$, e) $\text{rz}A = 2$, $\text{rz}B = 2$, f) $\text{rz}A = 4$, $\text{rz}B = 2$.

8. a) $\text{rz}A = 3$ dla $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$; $\text{rz}A = 2$ dla $\lambda = -2$; $\text{rz}A = 1$ dla $\lambda = 1$
   b) $\text{rz}A = 4$ dla $\lambda \neq 4$; $\text{rz}A = 2$ dla $\lambda = 4$.

9. a) $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, c) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, f) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, g) $X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   h) $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 10 & 0 & 6 \\ 14 & -2 & 12 \end{bmatrix}$, i) $X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$