

1 FKE-DL, semestr 1, 2018/19
Algebra liniowa z geometrią analityczną
Zestaw zadań dodatkowych do samodzielnej pracy
Część 1. Liczby zespolone

1. Wykonać podane działania na liczbach zespolonych:

- a) $(1 + 2i)(3 - 2i) =$
- b) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^3 =$
- c) $\frac{3 - i}{2 + i} =$
- d) $\frac{(5 + i)(-1 + 2i)}{(2 + i)^2} =$
- e) $\operatorname{Re}(iz^2)$, gdzie $z = x + iy$
- f) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z - 1}\right)$, gdzie $z = x + iy$

2. Przedstawić liczby zespolone z w postaci trygonometrycznej:

- a) $z = -5$
- b) $z = 2i$
- c) $z = 1 + \sqrt{3}i$
- d) $z = 2i(1 - i)$
- e) $z = \frac{1 - i}{1 + i}$
- f) $z = (1 + \sqrt{3}i)2i$

3. Obliczyć:

- a) $(1 + i)^{10} =$
- b) $(2 + \sqrt{12}i)^5 =$
- c) $(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^6 =$
- d) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12} =$
- e) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{12} =$
- f) $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}\right)^6 =$
- g) $\frac{(1 - i)^{10}}{(\sqrt{3} + i)^6} =$
- h) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^8}{(-1 - i)^5} =$

4. Obliczyć:

- a) $\sqrt{-4} =$

- b) $\sqrt{-8i} =$
- c) $\sqrt{-3 - 4i} =$
- d) $\sqrt{8 + 6i} =$
- e) $\sqrt{4i - 3} =$
- f) $\sqrt[4]{-4} =$
- g) $\sqrt[3]{i} =$
- h) $\sqrt[3]{2 - 2i} =$
- i) $\sqrt[6]{-27}$
- j) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

5. Odgadując jeden z elementów pierwiastków, obliczyć :

- a) $\sqrt{(3 - 5i)^2}$
- b) $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - i)^{12}}$
- c) $\sqrt[3]{(2 - i)^6}$

6. Znaleźć rozwiązanie równania $z^6 = (2 + 4i)^6$.

7. Rozwiązać równania:

- a) $2z^2 + 3z + 9 = 0$
- b) $z^2 - 2z + 17 = 0$
- c) $x^2 = 4\bar{z}$
- d) $\frac{z + 2}{i - 1} = \frac{3z + i}{2 + i}$
- e) $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$
- f) $z^2 + 6iz - 10 = 0$
- g) $z^3 - z + 6 = 0$
- h) $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$
- i) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$

8. Znając niektóre z pierwiastków podanych wielomianów, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

- a) $W(z) = z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 7z - 3\sqrt{2}$, $z_1 = \sqrt{2} + i$
- b) $W(z) = z^6 - 6z^5 + 18z^4 - 28z^3 + 31z^2 - 22z + 14$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$

9. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$
- b) $\operatorname{Im}((x + iy)^2) \leq 0$
- c) $\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{4}{z} = \bar{z} \right\}$

- d) $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z-i} = z-i\}$
 e) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1$
 f) $\operatorname{Re}(z+1) < 0 \wedge |i-z| \leq 3$

Odpowiedzi

1. a) $7+4i$
 b) $8+2i$
 c) $1-i$
 d) $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$
 e) $-2xy$
 f) $\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$
2. a) $z = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$
 b) $z = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
 c) $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$
 d) $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$
 e) $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$
 f) $z = (4(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}))$
3. a) $32i$
 b) $29(1 - \sqrt{3}i)$
 c) -27
 d) 1
 e) 1
 f) $-\frac{1}{8}i$
 g) $\frac{1}{2}i$
 h) $-2^4(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1))$
4. a) $z_1 = 2i, z_2 = -2i$
 b) $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 2 - 2i$
 c) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -1 + 2i$
 d) $z_1 = 3 + i, z_2 = -3 - i$
 e) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 - 2i$
 f) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i, z_3 = -1 - i, z_4 = 1 - i$
 g) $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), z_3 = -i$
 h) $z = \sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \alpha = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$

- i) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = i\sqrt{3}, z_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_5 = -i\sqrt{3}, z_6 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- j) $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -\sqrt{3} - i, z_4 = 1 - \sqrt{3}i$
5. a) $-3 + 5i, 3 - 5i$
 b) $-8i; 8; 8i; -8$
 c) $3 - 4i; -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + i \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + i \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
6. $2 + 4i; 1 - 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i; -1 - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 2); -2 - 4i; 2\sqrt{3} - 1 + i(-2 - \sqrt{3}); 1 + 2\sqrt{3} + i(2 - \sqrt{3})$
7. a) $-\frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{7}}{4}i$
 b) $1 \pm 4i$
 c) $0; 4; -2 + 2\sqrt{3}i; -2 - 2\sqrt{3}i$
 d) $\frac{-19}{29} - \frac{25}{29}i$
 e) $2 + i; 1 - 3i$
 f) $-1 - 3i; 1 - 3i$
 g) $2; 1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2}$
 h) $-2; -1 + i; -1 - i$
 i) $-2 + i; -2 - i; 2 + i; 2 - i$
8. a) $z_1 = \sqrt{2}; z_2 = \sqrt{2} + i; z_3 = \sqrt{2} - i$
 b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i; z_3 = 2 - \sqrt{3}i; z_4 = 2 + \sqrt{3}i; z_5 = i; z_6 = -i$
9. a) $y \leq 2$
 b) II i IV ćwiartka układu współrzędnych, wraz z osiami
 c) okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r=2$
 d) $y = 1$