1 MM-DI, Matematyka 1

Ćwiczenia nr 3, 21-22.10.2020 r.

Przykład 1. Obliczyć i przestawić na płaszczyźnie zespolonej $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

Rozwiązanie: Przypomnienie: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Przedstawmy liczbę $z = -8-8\sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej. Mamy

$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 3\cdot 64} = \sqrt{4\cdot 64} = 2\cdot 8 = 16.$

Stąd $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-8}{16} \\ \sin\alpha = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$

Zatem $z = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ jest postacią trygonometryczną liczby $z = -8-8\sqrt{3}i$.

Obliczamy

$$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Gdy $k = 0$ mamy
$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right)$$
$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$w_0 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$w_0 = 1 + \sqrt{3}i$$

Gdy $k = 1$ mamy
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12}\right)$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$w_1 = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$w_1 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$w_1 = -\sqrt{3} + i$$

Gdy $k=2$ mamy $$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{16\pi}{12} + i\sin\frac{16\pi}{12}\right)$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$w_2 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$w_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$w_2 = -1-\sqrt{3}i$$

Gdy $k=3$ mamy $$w_3 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 3\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{22\pi}{12} + i\sin\frac{22\pi}{12}\right)$$

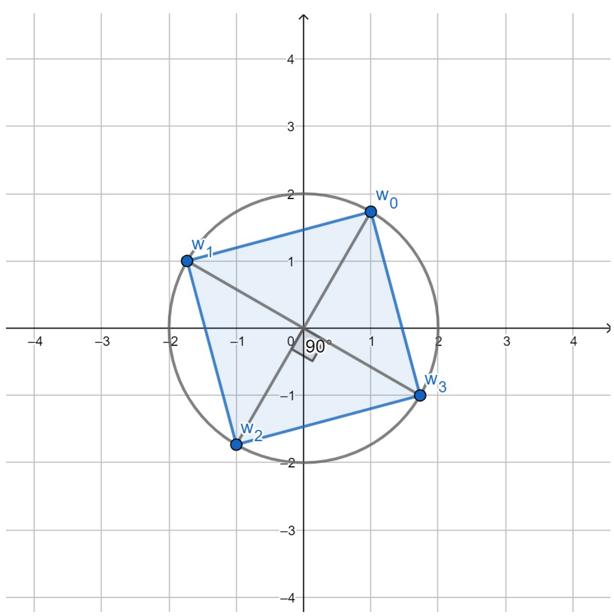
$$w_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$w_3 = 2\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$w_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$w_3 = \sqrt{3}-i$$



II Sposób Przypomnienie: $w_k = w_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$

Ponieważ $w_0 = 1 + \sqrt{3}i$, $n = 4$ zatem

$$w_1 = \left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)$$
$$w_1 = \left(1+\sqrt{3}i\right)(0+i)$$
$$w_1 = i + \sqrt{3}i^2$$
$$w_1 = -\sqrt{3} + i$$

oraz

$$w_2 = \left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right)$$
$$w_2 = \left(1+\sqrt{3}i\right)(-1+i\cdot 0)$$
$$w_2 = -1 - \sqrt{3}i$$

oraz

$$w_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right)$$
$$w_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)(0+i\cdot(-1))$$
$$w_3 = -i - \sqrt{3}i^2$$
$$w_3 = \sqrt{3} - i$$

Zad. 1 Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i}$ b) $\sqrt[3]{-8i}$ c) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Przykład 2. Korzystając z definicji obliczyć pierwiastek $\sqrt{-15+8i}$.

Rozwiązanie: Niech $\sqrt{-15+8i} = x + iy$. Wówczas $-15 + 8i = x^2 - y^2 + 2xyi$, a stąd

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -15 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$$

Zajmijmy się równaniem pierwszym: $x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -15$. Mamy

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = -15 \parallel \cdot x^2$$
$$x^4 - 16 = -15x^2$$
$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

Podstawiamy $t = x^2$, $t \geqslant 0$ otrzymując $t^2 + 15t - 16 = 0$. Zauważmy, że $t_1 = 1$, wówczas $t_2 = \frac{c}{a} = \frac{-16}{1} = -16$ (t_2 jest sprzeczne). Zatem $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$. Wracając do układu otrzymujemy

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Zatem $\sqrt{-15 + 8i} = 1 + 4i \vee \sqrt{-15 + 8i} = -1 - 4i$.

Zad. 2 Korzystając z definicji obliczyć pierwiastki

a) $\sqrt{4i - 3}$ b) $\sqrt{5 - 12i}$ c) $\sqrt{\frac{22+31i}{2+i}}$.

Wyniki podać w postaci algebraicznej.

Zad. 3 Niech $z = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})^6}{(\sqrt{3} + i)^9}$. Podać postać algebraiczną liczby z. Obliczyć $\sqrt[3]{z}$.

Przykład 3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązań równanie $z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$.

Rozwiązanie: $a = 1$, $b = 1 + 4i$, $c = -5 - i$. Obliczamy

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5 - i)$$

$$\Delta = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$$

$$\Delta = 5 + 12i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5 + 12i}$$

Niech $\sqrt{5 + 12i} = x + iy$. Wtedy $5 + 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$. Zatem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

Zajmujemy się równaniem pierwszym $x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$. Mamy

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \parallel \cdot x^2$$

$$x^4 - 36 = 5x^2$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Podstawiamy $t = x^2$, $t \geqslant 0$ otrzymując $t^2 - 5t - 36 = 0$. Obliczamy $\Delta_t = 25 + 144 = 169$ stąd $\sqrt{\Delta_t} = 13$. Wtedy $t_1 = \dfrac{5-13}{2} = -4$, $t_2 = \dfrac{5+13}{2} = 9$. ($t_1$ - sprzeczne) Zatem $x^2 = 9$ $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$. Wracając do układu otrzymujemy

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Zatem $\sqrt{5+12i} = 3 + 2i \vee \sqrt{5+12i} = -3 - 2i$. Niech $\delta = 3 + 2i$. Wówczas

$$z_1 = \frac{-1-4i-3-2i}{2} \vee z_2 = \frac{-1-4i+3+2i}{2}$$
$$z_1 = \frac{-4-6i}{2} \vee z_2 = \frac{2-2i}{2}$$
$$z_1 = -2 - 3i \vee z_2 = 1 - i$$

Zad. 4 Rozwiązać równanie

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$ b) $z^2 + (2-i)z - \frac{3}{4} - 3i = 0$ c) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$

d) $z^3 - 3z^2 + z - 3 = 0$ e) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ f) $27z^3 - 8 = 0$

Zadania domowe*

Zad. 1 Obliczyć $\sqrt[4]{-\sqrt{2} + i\sqrt{6}}$, $\sqrt{-8-6i}$.

*Zadania nieobowiązkowe, do samodzielnego przećwiczenia materiału, proszę przesłać na mail: nbednarz@prz.edu.pl