

Zestaw zadań do samodzielnej pracy nr 1
ME-DI, semestr zimowy, rok akademicki 2019/2020

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

a) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

d) $f(x) = \log(x^2+3x+4)$

e) $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$

f) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

g) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$

h) $f(x) = \log_x \frac{x}{4-x} + \sqrt[3]{x^2-7x}$

i) $f(x) = \sqrt{4x-x^2} - \log_3 \left(\frac{x^2+2x-8}{x-2} - 2 \right)$

j) $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(x+5) + 2}$

2. Utworzyć funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$, określić ich dziedziny oraz podać funkcję zewnętrzną i wewnętrzną, gdy:

a) $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$

b) $f(x) = 2 + \cos x, g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$

d) $f(x) = 2^{x+2}, g(x) = \log_2 x$

e) $f(x) = |x+2|, g(x) = \sin(x+1)$

f) $f(x) = \cos 3x, g(x) = \arccos x$

3. Zbadać z definicji parzystość bądź nieparzystość funkcji f określonej następująco:

a) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x(x^3 + x)}$

b) $f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 4}{x(x^2 + 1)}$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2+3}{x^2-4}\right)$

d) $f(x) = \cos(x^3 - x)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

f) $f(x) = \log_3 2^{-x}$

g) $f(x) = xe^{x^2+1}$

h) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. Znaleźć funkcję odwrotną f^{-1} do funkcji f , gdzie:

a) $f(x) = 2 - \log_5 x$

b) $f(x) = \frac{1}{2^x + 4}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$

d) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$

e) $f(x) = 2 \sin 2x + 4$

5. Rozłożyć funkcję na sumę wielomianu i ułamków prostych

a) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 12x^3 + 52x^2 + 96x + 64}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + 5x + 6}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

g) $f(x) = \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2}{x^4 - 1}$

6. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $1 - |x + 5| = x$

b) $|x| = 0.5x - 1$

c) $|x - 1| \leq 1$ item $|x - 3| > 3$

d) $4^{2x-1} = 8^{x+2}$

e) $2^x + 2^{x+2} = 20$

f) $2^{1-x} > \frac{1}{2}$,

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

h) $2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$

i) $4 \log_2 x = \log_2 81$

j) $\log_{0.5} x > 1$

k) $\log_3 x + \log_3 2 > \log_3 6$

l) $\log(x - 4) \leq 1 + \log(x - 2)$

m) $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$

- n) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$
- o) $x^3 - 5x^2 - 5x + 20 = 0$
- p) $(x - 2)(x^2 + 2x - 3) > 0$
- q) $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$
- r) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2}{x-3}$
- s) $\frac{x-3}{2x-7} \geq 0$
- t) $\frac{3x-8}{x-2} \leq 0$

7. Rozwiązać równania i nierówności

- a) $\operatorname{tg}(-x) = -\sqrt{3}$
- b) $\cos x = \cos(\pi - x)$
- c) $\sin 3x = \sin(x + \pi)$
- d) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- e) $\cos 3x > \frac{1}{2}$
- f) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- g) $2 \sin \frac{\pi x}{3} \geq \sqrt{3}$
- h) $2 \cos \frac{\pi x}{2} < \sqrt{2}$

8. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{6-5n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{3-n^3}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2-2n)^2}{2n^2-5n^3+4n-2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$

9. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n)$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n}$

- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1}}{n}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 2n^2} - \sqrt{1 + 4n^2}}{n}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3})$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n)$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3 + 5n^2 - 7})$

10. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 7}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$

11. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^3 + 1} \cdot \cos n!$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^3 + 2} \sin 2n$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{6}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n^3 + 7}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \cos(n\pi)$

12. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n}{n^2}\right)^{12n}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{3-2n^2}$

- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
 h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2} - 2n)$
 i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n} - \sqrt{5n^2 - 7})$

13. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granice następujących funkcji:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7^2}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n + \sin n}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n + 20}$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n^2 + 1}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n \sin n}{n^2 + 1}$

14. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 5x + 4} =$
 b) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + 3^t}{\sqrt{t + 3}} =$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x + 1} =$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} =$
 e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x) =$
 f) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2 - t - 2}{2t^2 + 5t - 7}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} =$
 h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x^2 + 3x - 4}{2x^3 + 1} =$
 i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x^2 + 3x - 4}{2x^2 + 1} =$
 j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) =$
 k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} =$
 l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5} =$
 m) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 9} - 3} =$
 n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) =$

- o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x - 1} + 3x + 2)$
 p) $\lim_{x \rightarrow -2} \log(2 + 2x + x^2 - x^3) =$
 q) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - 3^{2a}}{3^a - 1} =$
 r) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) =$

15. Obliczyć granicę:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x} =$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \sin 2x} =$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x} =$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x} =$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} =$
 f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1} =$
 g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{2x-5} =$
 h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} =$
 i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 1)^{x - 2}} =$
 j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{2}{\cos x}} =$
 k) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{\log_a x - \log_a b}{x - b}$

16. Obliczyć granice lewostronną i prawostronną funkcji f w punkcie x_0 :

- a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$
 b) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, x_0 = 0$
 c) $f(x) = \frac{-4}{x - 3}, x_0 = 3$
 d) $f(x) = \frac{-4}{(x - 3)^2}, x_0 = 3$
 e) $f(x) = 4^{\frac{1}{x^2 - 4}}, x_0 = 2$
 f) $f(x) = 4^{\frac{1}{x^2 - 4}}, x_0 = -2$
 g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 3x + 9}{x^2 - 9}, x_0 = 3$

17. Zbadać ciągłość funkcji f , gdy:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 - x^2 & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ \log x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x + 5} & \text{dla } x \neq -5 \\ -10 & \text{dla } x = -5 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -x + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{dla } x \in \langle -3, 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x = 1 \\ \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

18. Dobrać (o ile to możliwe) tak parametr a , aby funkcja f była ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 8 & \text{dla } x \leq 0 \\ (x - a)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{dla } x < -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 1 & \text{dla } x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Odpowiedzi

1. a) $D = \{3\}$

b) $D = (0, +\infty)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$

d) $D = \mathbb{R}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f) $d + \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

h) $D = (0, 1) \cup (1, 4)$

i) $D = \langle 0, 2 \rangle \cup (2, 4)$

j) $D = (-5, -1)$

2. a) $(f \circ g)(x) = 4^x; (g \circ f)(x) = 2^{x^2}$

b) $(f \circ g)(x) = 2 + \cos \sqrt{x}; (g \circ f)(x) = \sqrt{2 + \cos x}$

c) $(f \circ g)(x) = \sin x^2; (g \circ f)(x) = \sin^2 x$

d) $(f \circ g)(x) = 4x; (g \circ f)(x) = x + 2$

e) $(f \circ g)(x) = |\sin(x+1) + 2|; (g \circ f)(x) = \sin(|x+2| + 1)$

3. a) parzysta, b) nieparzysta, c)-e) parzysta, f)-h) nieparzysta

4. a) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f^{-1}(y) = 5^{2-y}$

b) $f^{-1} : (0, \frac{1}{4}) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \log_2(\frac{1}{y} - 4)$

c) Wskazówka: $f(x) = (x-1)^3 + 28, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = 1 + \sqrt[3]{y-28}$

d) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = -y^3 + 9y^2 - 27y + 25 = (3-y)^3 - 2$

e) $f^{-1} : \langle 2, 6 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle, f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \arcsin(\frac{y-4}{2})$

f) $f^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$

5. a) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}$

c) $f(x) = \frac{-2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2}$

d) $f(x) = 1 + \frac{23}{x+2} - \frac{33}{x+3}$

- e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$
- f) $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1} \right)$
- g) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+1}$
6. a) $x = -2$
- b) $x \in \emptyset$
- c) $x \in \langle 0, 2 \rangle$
- d) $x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$
- e) $x = 4$
- f) $x = 2$
- g) $x \in (-\infty, 2)$
- h) $x \in \langle -5, +\infty \rangle$
- i) $x = 1$
- j) $x = 3$
- k) $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$
- l) $x \in (3, +\infty)$
- m) $x \in (4, +\infty)$
- n) $x \in \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- o) $x \in \{-2, 0\}$
- p) $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 4\}$
- q) $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$
- r) $x \in \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$
- s) $x = -1\frac{1}{6}, D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$
- t) $x \in (-\infty, 3) \cup \left(3\frac{1}{2}, +\infty \right)$
7. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- d) $x \in -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $x \in \left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right), k \in \mathbb{Z}$
- f) $x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
- g) $x \in \left(2, 2\frac{2}{3} \right)$
- h) $x \in \langle 1 + 6k, 2 + 6k \rangle, k \in \mathbb{Z}$
- i) $x \in \left(\frac{8k+1}{2}, \frac{8k+7}{2} \right)$
8. a) $-\frac{4}{5}$
- b) 0

- c) -2
 - d) $+\infty$
 - e) $\frac{1}{3}$
 - f) $-\frac{2}{5}$
 - g) $\frac{4}{9}$
9. a) $+\infty$
- b) $+\infty$
 - c) 1
 - d) 0
 - e) $\sqrt{2} - 2$
 - f) 0
 - g) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - h) $\frac{4}{3}$
 - i) $-\frac{5\sqrt[3]{2}}{6}$
10. a) 0
- b) $\frac{5}{4}$
 - c) $-\infty$
 - d) $\frac{48}{5}$
11. Korzystamy z tw. o ciągu ograniczonym i ciągu zbieżnym do 0:
a)-f) 0
12. a) e^3
- b) e^{-1}
 - c) $e^{-\frac{1}{4}}$
 - d) e^6
 - e) e^{48}
 - f) e^6
 - g) 1
 - h) 0
 - i) 0
13. a) 7
- b) 1
 - c) $\frac{2}{3}$
 - d) 1
 - e) 0

14. a) $\frac{3}{2}$
b) 2
c) 0
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{2}$
f) $\frac{5}{9}$
g) 0
h) $-\frac{1}{2}$
i) ∞
j) $-\frac{5}{2}$
k) $\frac{1}{4}$
l) 5
m) $\frac{3}{2}$
n) 0
o) $\frac{4}{3}$
p) 1
q) -2
r) $+\infty$

15. a) $\frac{3}{7}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{4}$
e) 2
f) e
g) $e^{-\frac{4}{3}}$
h) e^3
i) e
j) e^2
k) $\frac{1}{b}$

16. Prawostronna/lewostronna

- a) $+\infty/0$
b) $0/1$
c) $-\infty/+ \infty$

d) $-\infty / -\infty$

e) $+\infty / 1$

f) $1 / +\infty$

g) $-\frac{1}{3} / -\frac{2}{3}$

17. a) funkcja ciągła na zbiorze $\langle 0, 2 \rangle$

b) ciągła na \mathbb{R}

c) ciągła na \mathbb{R}

d) ciągła na \mathbb{R}

e) nie jest ciągła w $x_0 = 0$

f) nie jest ciągła w $x_0 = 0$

18. a) $a = -3 \vee a = 3$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $a = -1$

d) $a = \frac{3}{2}$