1 FS-DI, semestr 1, 2019/20
Algebra liniowa z geometrią analityczną
Zestaw zadań dodatkowych do samodzielnej pracy
Część 2. Macierze i układy równań liniowych

1. Wykonać działania

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$

b) $3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} =$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} =$

f) $(A \cdot A^T)^2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T =$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$

2. Na macierzach $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

wykonać (o ile to możliwe) wskazane działania (a) AB (b) AC (c) AD (d) BA (e) CA (f) DA (g) A^3 (h) B^3 (i) C^3 (j) D^3 (k) AC^T (l) $(C + D^T)(C^T + D)$ (m) $(DC + 3A)^2$

3. Wyznaczyć $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ a następnie udowodnić go indukcyjnie.

4. Obliczyć wyznaczniki

a) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad \det B = \begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$ $\quad \det C = \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2i & -1 \\ i & 0 & -2i \\ i & 1 & 1+i \end{vmatrix}$

c) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

5. Wyznaczyć dla jakiej wartości parametru λ macierz A jest macierzą nieosobliwą:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & -3 \\ \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$

6. Znaleźć macierze odwrotne do podanych (o ile to możliwe)

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7. Wyznaczyć rzędy podanych macierzy oraz wyznaczyć ich minory

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 1 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

8. Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$

9. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} 2x+y &= 3 \\ x-y &= 3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x+3y &= 10 \\ 3x+2y &= 5 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2x+3y &= 3 \\ 4x+6y &= 3 \end{cases}$, d) $\begin{cases} 2x-4y &= 6 \\ -3x+6y &= -9 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ -x+y &= 3 \\ x+y &= 1 \end{cases}$, f) $\begin{cases} 3x-2y &= 3 \\ 6x+y &= 3 \\ x+y &= 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x-y &= 3 \\ -x+y &= -3 \\ 2x+2y &= 6 \end{cases}$

10. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ -x+y+z &= 4 \\ x+y+z &= 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x-2y+2z &= 1 \\ -x+2y+z &= 1 \\ 2x-4y+2z &= 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2x+y+z &= 4 \\ 3x+y+z &= 5 \\ x+2y+2z &= 5 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ x-3z &= 6 \\ 3y-z &= 1 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x+y-5z &= 2 \\ 2x-3y+5z &= 1 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x-z &= 1 \\ y-z &= 2 \\ x-y &= 3 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= -1 \\ x-3y+3z &= 2 \end{cases}$, h) $\begin{cases} x+2y+w &= 3 \\ x-3z-w &= 6 \\ 2x+3y-z &= 1 \\ x+y-2z+w &= 11 \end{cases}$, i) $\begin{cases} x-2y+3z-4w &= 2 \\ 2x+y-z+w &= 1 \\ 3x+4y-5z+6w &= 0 \end{cases}$,

j) $\begin{cases} 2x-y+z &= 5 \\ x-3y+2z &= 2 \\ 3x+y-z &= 5 \\ x+2y-2z &= 1 \end{cases}$, k) $\begin{cases} 2x+3y-z+3t &= 7 \\ -3x+2y+3z-t &= 5 \\ 3x+y+z+2t &= 3 \\ 2x+6y+3z+4t &= 15 \end{cases}$

11. Wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układu równań:

a) $\begin{cases} 2x+y-3z &= -3 \\ x-y+2z &= 6 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$, $y=?$, b) $\begin{cases} x+2y+w &= 5 \\ 2x+3z+w &= 1 \\ 3y+z+2w &= 8 \\ 3x+y+2z &= 2 \end{cases}$, $y=?$,

c) $\begin{cases} x+y-z &= 4 \\ 2x+y+2w &= 7 \\ y+3z-w &= -7 \\ x+y-w &= 0 \end{cases}$, $z=?$, d) $\begin{cases} x+2y+w &= 8 \\ x-3z-w &= 8 \\ 2x-2y-z &= 0 \\ y-2z+w &= 7 \end{cases}$, $w=?$

12. Zbadać, w zależności od wartości parametru, układy równań:

a) $\begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= 1 \\ x+y+kz &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx-6y+3z &= 0 \\ 2x+my+z &= 16 \\ x-2y+z &= 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+py-z &= 13 \\ -3x+y+pz &= 4p \\ 4x+y-3z &= 5 \end{cases}$

Odpowiedzi - Macierze i układy równań

1. a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 410 & 341 \\ 341 & 317 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -6 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. (a)

3. $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $\det A = -29,\ \det B = 5 + 21i,\ \det C = -2$
   b) $\det A = -2,\ \det B = 15,\ \det C = 20,\ \det D = 2 + 7i$
   c) $\det A = 201,\ \det B = -71,\ \det C = -289$
   d) $\det A = 6,\ \det B = 0,\ \det C = 297$
   e) $\det A = 130,\ \det B = -72,\ \det C = -355$
   f) $\det A = 46,\ \det B = -65,\ \det C = -55$

5. a) $\lambda = 2\sqrt{2}$, $\lambda = -2\sqrt{2}$ b) $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$

6. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
   b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
   c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
   d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

7. a) $\mathrm{rz}A = 2$, $\mathrm{rz}B = 1$, b) $\mathrm{rz}A = 3$, $\mathrm{rz}B = 2$, c) $\mathrm{rz}A = 3$, $\mathrm{rz}B = 3$, d) $\mathrm{rz}A = 4$, $\mathrm{rz}B = 2$, e) $\mathrm{rz}A = 2$, $\mathrm{rz}B = 2$, f) $\mathrm{rz}A = 4$, $\mathrm{rz}B = 2$.

8. a) $\mathrm{rz}A = 3$ dla $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$; $\mathrm{rz}A = 2$ dla $\lambda = -2$; $\mathrm{rz}A = 1$ dla $\lambda = 1$
   b) $\mathrm{rz}A = 4$ dla $\lambda \neq 4$; $\mathrm{rz}A = 2$ dla $\lambda = 4$.

9. a) $x = 2, y = -1$, b) $x = -1, y = 4$, c) brak rozwiązań, d) $x = 2y + 3$, e) $x = -1, y = 2$, f) brak rozwiązań, g) $x = 3, y = 0$

10. a) $x = -1, y = 2, z = 1$, b) $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{1}{16}, z = \frac{3}{4}$, c) $x = 1, y = 2 - z$, d) $x = 3, y = 0, z = -1$, e) nieoznaczony $x = 2z + \frac{7}{5}, y = 3z + \frac{3}{5}$, f) sprzeczny, g) sprzeczny, h) $x = 58, y = -34, w = 13, z = 13$, i) nieoznaczony, $y = w - 7x + 5, z = 2w - 5x + 4$, j) sprzeczny, k) nieoznaczony, $t = \frac{43}{8}z - \frac{11}{8}, x = \frac{7}{8} - \frac{23}{8}z, y = \frac{25}{8} - \frac{25}{8}z$

11. a) , b) $y = 2$, c) $z = -2$, d) $w = 0$

12. a) $k \in \mathbb{R}\backslash\{2, 1\}$ układ oznaczony; $k = 1$, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów; $k = -2$ układ sprzeczny
    b) $m \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 3\}$ układ oznaczony; $m = -2, m = 3$ układ sprzeczny
    c) $p \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}, 2\}$ układ oznaczony; $p = 2$ układ nieoznaczony; $p = \frac{1}{2}$ układ sprzeczny