1 FS-DI, semestr 1, 2019/20
Algebra liniowa z geometrią analityczną
Zestaw zadań dodatkowych do samodzielnej pracy
Część 1. Liczby zespolone

1. Wykonać podane działania na liczbach zespolonych:

   a) $(1+2i)(3-2i) =$

   b) $(1+2i)^2 - (1-2i)^3 =$

   c) $\dfrac{3-i}{2+i} =$

   d) $\dfrac{(5+i)(-1+2i)}{(2+i)^2} =$

   e) $\mathrm{Re}(iz^2)$, gdzie $z = x+iy$

   f) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, gdzie $z = x+iy$

2. Przedstawić liczby zespolone z w postaci trygonometrycznej:

   a) $z = -5$

   b) $z = 2i$

   c) $z = 1+\sqrt{3}i$

   d) $z = 2i(1-i)$

   e) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$

   f) $z = (1+\sqrt{3}i)2i$

3. Obliczyć:

   a) $(1+i)^{10} =$

   b) $(2+\sqrt{12}i)^5 =$

   c) $(1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^6 =$

   d) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12} =$

   e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12} =$

   f) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{6} =$

   g) $\dfrac{(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^6} =$

   h) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^8}{(-1-i)^5} =$

4. Obliczyć:

   a) $\sqrt{-4} =$

b) $\sqrt{-8i} =$

c) $\sqrt{-3-4i} =$

d) $\sqrt{8+6i} =$

e) $\sqrt{4i-3} =$

f) $\sqrt[4]{-4} =$

g) $\sqrt[3]{i} =$

h) $\sqrt[3]{2-2i} =$

i) $\sqrt[6]{-27}$

j) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$

5. Rozwiązać równania:

   a) $2z^2 + 3z + 9 = 0$

   b) $z^2 - 2z + 17 = 0$

   c) $x^2 = 4\overline{z}$

   d) $\dfrac{z+2}{i-1} = \dfrac{3z+i}{2+i}$

   e) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$

   f) $z^2 + 6iz - 10 = 0$

   g) $z^3 - z + 6 = 0$

   h) $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$

   i) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$

6. Znając niektóre z pierwiastków podanych wielomianów, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

   a) $W(z) = z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 7z - 3\sqrt{2}$, $z_1 = \sqrt{2} + i$

   b) $W(z) = z^6 - 6z^5 + 18z^4 - 28z^3 + 31z^2 - 22z + 14$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$

7. Na płaszczyniec zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

   a) $\mathrm{Re}(iz+2) \geqslant 0$

   b) $\mathrm{Im}\left((x+iy)^2\right) \leqslant 0$

   c) $\left\{z \in \mathbb{C} : \dfrac{4}{z} = \overline{z}\right\}$

   d) $\left\{z \in \mathbb{C} : \overline{z-i} = z - i\right\}$

   e) $\left|\dfrac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1$

   f) $\mathrm{Re}(z+1) < 0 \wedge |i - z| \leqslant 3$

Odpowiedzi

1. **a)** $7 + 4i$

b) $8 + 2i$

c) $1 - i$

d) $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$

e) $-2xy$

f) $\dfrac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$

2. **a)** $z = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

   b) $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

   c) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

   d) $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

   e) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

   f) $z = (4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5'pi}{6})$

3. **a)** $32i$

   b) $29(1 - \sqrt{3}i)$

   c) -27

   d) 1

   e) 1

   f) $-\dfrac{1}{8}i$

   g) $\dfrac{1}{2}i$

   h) $-2^4\left(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)\right)$

4. **a)** $z_1 = 2i, z_2 = -2i$

   b) $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 2 - 2i$

   c) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -1 + 2i$

   d) $z_1 = 3 + i, z_2 = -3 - i$

   e) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 - 2i$

   f) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i, z_3 = -1 - i, z_4 = 1 - i$

   g) $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), z_3 = -i$

   h) $z = \sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \alpha = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$

   i) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = i\sqrt{3}, z_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_5 = -i\sqrt{3}, z_6 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   j) $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -\sqrt{3} - i, z_4 = 1 - \sqrt{3}i$

5. a) $-\dfrac{3}{4} \pm \dfrac{3\sqrt{7}}{4}i$

   b) $1 \pm 4i$

   c) $0; 4; -2 + 2\sqrt{3}i; -2 - 2\sqrt{3}i$

d) $\frac{-19}{29} - \frac{25}{29}i$

e) $2 + i; 1 - 3i$

f) $-1 - 3i; 1 - 3i$

g) $2; 1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2}$

h) $-2; -1 + i; -1 - i$

i) $-2 + i; -2 - i; 2 + i; 2 - i$

6. a) $z_1 = \sqrt{2}; z_2 = \sqrt{2} + i; z_3 = \sqrt{2} - i$

   b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i; z_3 = 2 - \sqrt{3}i; z_4 = 2 + \sqrt{3}i; z_5 = i; z_6 = -i$

7. a) $y \leqslant 2$

   b) II i IV ćwiartka układu współrzędnych, wraz z osiami

   c) okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r=2

   d) $y = 1$