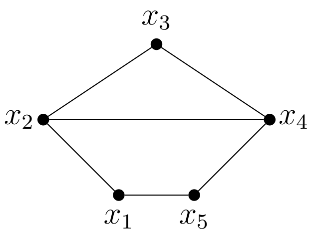
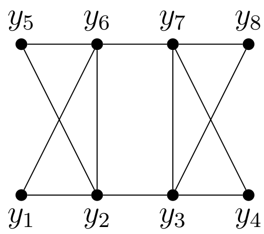
1 FS-DI,
Teoria grafów i sieci
Zestaw zadań dodatkowych do samodzielnej pracy

Zad. 1 Wyznaczyć macierz sąsiedztw oraz macierz incydencji grafu G przedstawionego na rysunku poniżej. Czy graf ten jest eulerowski/półeulerowski? Wyznaczyć cykl/drogę Eulera.

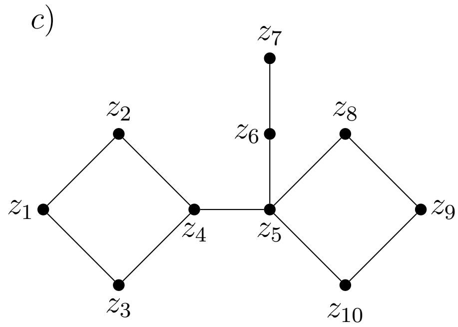
a)



b)

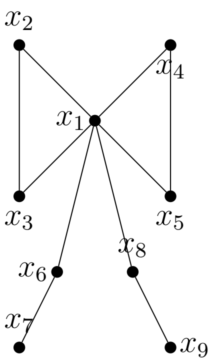


c)

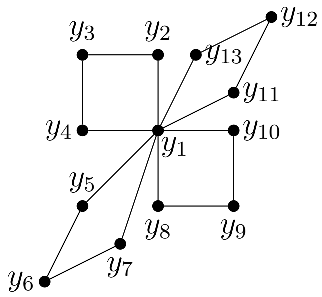


Zad. 2 Czy graf jest eulerowski/ półeulerowski? Odpowiedź uzasadnić. Wyznaczyć cykl/drogę eulera (o ile to możliwe)

a)



b)



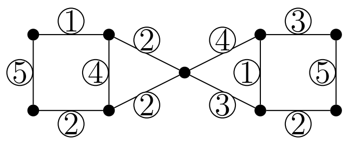
Zad. 3 Dana jest macierz incydencji B grafu G:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

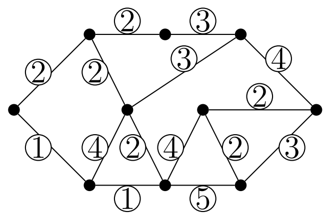
Wyznaczyć macierz sąsiedztw tego grafu. Narysować ten graf.

Zad. 4 Wyznaczyć liczbę wszystkich drzew rozpinających grafu G, gdy $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E(G) = \{12; 23; 34; 45; 14; 24; 25\}$.

a)



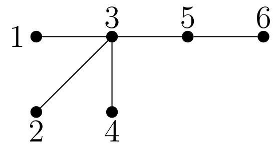
b)



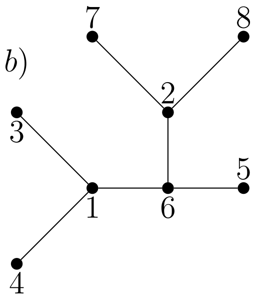
Zad. 5 Wykorzystując algorytm Kruskala / Priama wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające grafu G oraz podać jego wagę:

Zad. 6 Znaleźć kod Prüfera dla podanych drzew:

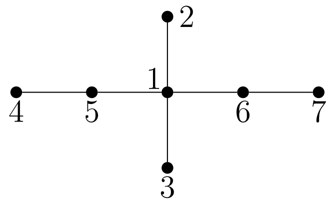
a)



b)



c)



Zad. 7 Narysować drzewa o kodzie Prüfera:

a) $(1, 2, 1, 2, 1, 2)$

b) $(5, 1, 2, 2, 2)$

c) $(3, 1, 1, 5, 1)$

d) $(1, 3, 5, 7, 9, 7, 5, 3, 1)$

Zad. 8 Niech dana będzie macierz sąsiedztw A grafu G. Podać liczbę dróg długości 2 łączących wierzchołek x_3 z x_1 w grafie G.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 9 Dana jest macierz sąsiedztw grafu G. Obliczyć stopnie wierzchołków grafu G. Wyznaczyć macierz incydencji grafu G.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi:

Zad. 1 a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Jest półeulerowski (dokładnie dwa wierzchołki są nieparzystego stopnia); przykładowa droga eulera: $x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_1 - x_2 - x_4$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Jest eulerowski (stopień każdego wierzchołka jest parzysty); przykładowy cykl eulera: $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_7 - y_8 - y_3 - y_7 - y_6 - y_5 - y_2 - y_6 - y_1$

c) jest półeulerowski; przykładowa droga eulera: $z_7 - z_6 - z_5 - z_8 - z_9 - z_{10} - z_5 - z_4 - z_2 - z_1 - z_3 - z_4$

Zad. 2 a) jest półeulerowski, ponieważ dokładnie dwa wierzchołki mają stopień parzysty; przykładowa droga eulera: $x_7 - x_6 - x_1 - x_3 - x_2 - x_1 - x_4 - x_5 - x_1 - x_8 - x_9$ b) jest eulerowski, ponieważ stopień każdego wierzchołka jest parzysty; przykładowy cykl eulera: $y_1 - y_5 - y_6 - y_7 - y_1 - y_8 - y_9 - y_{10} - y_1 - y_{11} - y_{12} - y_{13} - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_1$